Voorwoord

De wiskundige vorming die in de wiskundig sterke richtingen van het Vlaamse secundair onderwijs wordt aangeboden, vormt een zeer degelijke basis voor hogere studies in wetenschappelijke, technologische en wiskundige richtingen.

Toch blijkt de aansluiting tussen het secundair onderwijs (SO) en het hoger onderwijs (HO) niet eenvoudig, zeker als het op wiskunde aankomt. Enerzijds hebben in de leerplannen bepaalde onderwerpen (denk aan deelbaarheid, determinanten, verzamelingenleer, projectieve meetkunde . . .) plaats geruimd voor nieuwe inhouden (probleemoplossende vaardigheden, onderzoekscompetenties, kansrekenen, statistiek . . .). Anderzijds worden er tussen het secundair en het hoger onderwijs ook grote vormelijke verschillen vastgesteld, verschillen in de manier van wiskunde aanbrengen, opbouwen, presenteren. Vandaar dat vaak over de SOHO-*problematiek* wordt gesproken.

Vanuit beide onderwijsniveaus worden steeds meer constructieve inspanningen geleverd om de SOHO-uitdaging aan te gaan. Leerkrachten maken dankbaar gebruik van de vrije ruimte om in richtingen met zeven of acht lesuren wiskunde extra onderwerpen aan te bieden en een meer rigoureuze opbouw te hanteren dan in een gemiddelde zesuursklas gebruikelijk is. Ook in het hoger onderwijs werden al heel wat initiatieven in het leven geroepen, zowel voor de laatstejaarsleerlingen als voor eerstejaarsstudenten.

Met de reeks SOHO Wiskunde Plantyn hopen we hierin ook een rol te spelen. We willen leerlingen van de derde graad met minstens zes lesuren wiskunde kennis laten maken met zowel inhoudelijke als vormelijke aspecten van wiskunde die in het hoger academisch onderwijs meer aandacht krijgen dan in het secundair. Ook voor studenten van een professionele bachelor wiskunde kan deze reeks een interessante kennismaking met meer academische wiskunde vormen.

SOHO Wiskunde Plantyn biedt een kant-en-klaar geheel aan, dat zowel als lessenreeks als voor begeleide zelfstudie gebruikt kan worden.

De boekjes uit deze reeks worden geschreven door veranderlijke teams, waarin leerkrachten SO met wiskundigen van een universiteit samenwerken. Daardoor kunnen we een academische stijl en inhoud combineren met een correct instapniveau, met aandacht voor de voorkennis van leerlingen en de nodige duiding.

Met elke titel binnen SOHO Wiskunde Plantyn willen we leerlingen, studenten, leerkrachten en docenten een excursie in de wondere wereld van de wiskunde aanreiken, wellicht langs nieuwe paden, soms over steile heuvels, maar telkens met nieuwe ervaringen en mooie vergezichten. Deze kennismakingen vinden hun vervolg in menige academische cursus, in opleidingen wiskunde en daarbuiten.

We wensen iedereen een leerrijke ervaring met dit boekje.

Inleiding

Waarom vectorruimten bestuderen?

Leerlingen uit de sterke wiskunderichtingen in het secundair onderwijs hebben het onderwerp vectorruimten mogelijk exemplarisch aangeraakt in de context van matrices. Wordt een 2×2-matrix voorgesteld door $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dan kunnen we twee 2×2-matrices optellen:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' & b + b' \\ c + c' & d + d' \end{pmatrix}$$

en een 2×2-matrix vermenigvuldigen met een reëel getal:

$$r \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ra & rb \\ rc & rd \end{pmatrix}.$$

Op die manier wordt de verzameling $\mathbb{R}^{2\times 2}$ van alle 2×2-matrices uitgerust met een optelling en een vermenigvuldiging met een reëel getal, die aan welbepaalde eigenschappen voldoen: de optelling van matrices is associatief, de vermenigvuldiging van een reëel getal met een matrix is distributief ten opzichte van de optelling van matrices, etc. Men zegt dat de verzameling $\mathbb{R}^{2\times 2}$ de structuur van een *vectorruimte* heeft.

Naast verzamelingen van matrices komen in het secundair onderwijs nog andere verzamelingen aan bod die de vectorruimtestructuur hebben. Veeltermen, complexe getallen, rijen, afbeeldingen, krachtvectoren ... alle gehoorzamen ze aan dezelfde wetmatigheden. Men kan elk van deze objecten bundelen in een verzameling die uitgerust wordt met een optelling en een vermenigvuldiging met een reëel getal. Doorzie je een van deze verzamelingen, voorzien van deze twee vaste bewerkingen, dan doorzie je ze allemaal. Daarom loont het de moeite om het begrip vectorruimte op een algemene manier te bestuderen.

In het gemeenschapsonderwijs vermeldt het leerplan van de richtingen met 7 wekelijkse lestijden wiskunde de vectorruimtestructuur als leerinhoud. Wat betreft het herkennen en concreet toepassen van de basiseigenschappen van een vectorruimte beperkt de leerplandoelstelling zich tot de geordende tweetallen (elementen van $\mathbb{R}^2$) en geordende drietallen (elementen van $\mathbb{R}^3$).

De abstracte structuur van de vectorruimte wordt in het wiskundecurriculum van het vrije onderwijs slechts zijdelings aangeraakt. Het leerplan vraagt niet veel meer dan dat de eigenschappen voor de optelling en scalaire vermenigvuldiging van vectoren en coördinaten in twee en drie dimensies gekend zijn en worden samengevat onder de benaming *reële vectorruimte met dimensie twee resp. drie.* Een algemene studie wordt niet gevraagd.

Nochtans is de studie van de abstracte vectorruimtestructuur een hoeksteen van de hogere, zowel zuivere als toegepaste, wiskunde.

In de reeks SOHO Wiskunde Plantyn zijn er twee boekjes lineaire algebra. In *Lineaire algebra I* definiëren we de vectorruimte en allerlei verwante begrippen zoals lineair afhankelijke en onafhankelijke vectoren, deelruimte, basis en dimensie en bewerkingen met deelruimten. In *Lineaire algebra II* leiden concrete voorbeelden tot een studie van eigenwaarden en eigenvectoren, die vervolgens in een meer wiskundige context worden toegepast om matrices te diagonaliseren. Het begrip lineaire afbeelding speelt daarbij een centrale rol. Indien de begrippen lineaire (on)afhankelijkheid, basis en dimensie in een andere cursus werden aangeleerd, dan is het niet noodzakelijk om *Lineaire algebra I* door te nemen. In dat geval kan kan meteen met *Lineaire algebra II* begonnen worden.

Beide delen eindigen met enkele toepassingen. Daarmee willen we laten zien dat de studie van een abstracte structuur kan leiden tot een antwoord op concrete probleemstellingen. Als eerste toepassing van dit deel zullen we de $n \times n$-matrices hernemen. Sommige van die matrices kunnen geschreven worden als de som van een symmetrische matrix ($a_{ij} = a_{ji}$) en een scheefsymmetrische matrix ($a_{ij} = -a_{ji}$), zoals

$$\begin{pmatrix} -2 & 7 & 6 \\ -9 & -5 & 1 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 8 & 5 \\ -8 & 0 & -1 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

We kunnen de vraag stellen voor welke $n \times n$-matrices dit mogelijk is.

Probleemstelling 1: welke vierkante matrices kunnen geschreven worden als de som van een symmetrische en een scheefsymmetrische matrix?

Als tweede toepassing beschouwen we de rij van Fibonacci $(f_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ waarbij elke term gelijk is aan de som van de twee voorgaande termen. Een recursief voorschrift van deze rij wordt dus gegeven door

$$(f_n) = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 1, 2 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{als } n > 2. \end{cases}$$

Om met dit recursief voorschrift bijvoorbeeld de 100e term te bepalen, moeten we eerst de 99e en de 98e term kennen. Daartoe moeten we eerst de 96e en de 97e term bepalen, etc. Dat zou veel efficiënter kunnen, mochten we een formule kennen waarmee we meteen de n-de term van de rij van Fibonacci kunnen bepalen, zonder eerst de $n - 1$ voorgaande termen te moeten berekenen.

Probleemstelling 2: bepaal een expliciet voorschrift van de rij van Fibonacci.

We beweren niet dat deze probleemstellingen enkel met de theorie van de vectorruimten opgelost kunnen worden. Maar de oplossing die we presenteren illustreert wel de veelzijdigheid van de fundamentele begrippen van die theorie. Bovendien laten die redeneringen toe om ook veralgemeningen van de bovenvermelde probleemstellingen op te lossen.

Studietips

Dit boekje kan als leidraad dienen voor een zelfstudieproject voor leerlingen van de derde graad of voor studenten van het hoger onderwijs. Maar het kan ook als tekstboek bij een gedoceerde cursus gebruikt worden. In het secundair onderwijs kan dat bijvoorbeeld in de vrije ruimte. De opdrachten die in de theorie staan, zijn bedoeld om begrippen te verankeren op een elementair niveau en worden dus best meteen gemaakt. Het werkelijke inzicht bij een meer abstract onderwerp kan echter enkel groeien door voldoende oefeningen achteraan het hoofdstuk te maken.

In tegenstelling tot wat vaak in het secundair onderwijs het geval is, kan niet elke oefening meteen worden opgelost. Er moet soms lang op gezocht worden. Bij de oefeningen ligt de waarde niet zozeer in het aanschouwen van een uitgewerkte oplossing, maar in het feit dat de leerling zelf gezocht heeft, ook al werd de uiteindelijke oplossing misschien niet gevonden. Door de verantwoordelijkheid meer bij de leerling te leggen, hopen we met deze publicatie een brug te kunnen slaan tussen het secundair en het hoger onderwijs.

Voorkennis

Een grondige kennis van het onderwerp *matrices en lineaire stelsels* is vereist om dit studiemateriaal vlot door te kunnen nemen. Enkele belangrijke onderwerpen zijn de optelling en de vermenigvuldiging van matrices en de bijbehorende eigenschappen. Ook het *rijherleiden* van een matrix moet goed gekend zijn.

We steunen voortdurend op het feit dat we elke matrix kunnen rijherleiden naar de gereduceerde rij-echelonvorm (*reduced row echelon form*, rijcanonieke matrix), die we in dit boekje kortweg de *trapvorm* van die matrix zullen noemen. Met de *rang* van een matrix bedoelen we het aantal niet-nulrijen van de trapvorm van die matrix.

Het is niet strikt nodig dat de lezer het rijherleiden handmatig kan uitvoeren. Daarvoor kan gepaste software worden gebruikt. Daarom zullen we de tussenstappen van de rijherleiding altijd weglaten. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ccc} \text{matrix } A & & \text{trapvorm van } A \\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} & \sim & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Op diverse plaatsen zullen we gebruik maken van het verband tussen het aantal oplossingen van een lineair stelsel en de rang van de uitgebreide matrix.

Stelling. Zij A een $m \times n$-matrix en B een $n \times 1$-matrix. Dan heeft het stelsel $A \cdot X = B$

(i) geen oplossingen als $\operatorname{rang} A < \operatorname{rang}(A \mid B)$,

(ii) een unieke oplossing als $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid B) = n$,

(iii) oneindig veel oplossingen als $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A \mid B) < n$.

We gaan er ook van uit dat de lezer een minimale kennis van het begrip *determinant* heeft. De determinant van een vierkante matrix A is een getal dat door zijn al dan niet nul zijn bepaalt of de matrix A inverteerbaar is. Ook determinanten kunnen met software berekend worden. We nemen dan ook de gewoonte aan geen tussenstappen te vermelden bij determinantberekeningen, bijvoorbeeld:

$$\begin{vmatrix} 2+m & n & 2 \\ m & 2 & 1 \\ m & n & -4 \end{vmatrix} = 6mn - 12m - 2n - 16.$$

De volgende stelling geeft enkele verbanden tussen de voorgaande begrippen.

Stelling. Zij A een $n \times n$-matrix, dan zijn de volgende uitspraken equivalent:

(i) de determinant van matrix A is verschillend van nul,

(ii) de matrix A is inverteerbaar,

(iii) de trapvorm van A heeft geen nulrij,

(iv) het homogeen stelsel $A \cdot X = 0$ heeft enkel de nuloplossing,

(v) voor elke $n \times 1$-matrix B heeft het stelsel $A \cdot X = B$ een unieke oplossing.

Inhoudsopgave

Lijst van bewijstechnieken